

# מבוא לאקונומטריקה

פרק 16 - סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות:

רקע:

| הבעיה                  | הגדרה                                                                                                                                                          | זיהוי                                                                           | השלכות                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | פתרון                         |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------|------------------|----------------------|--------------|----------|-------------------------------------|-------------|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------------|--------------|
| הוספת משתנה לא רלוונטי | המודל האמיתי :<br>$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$<br><br>המודל הנאמד (הטעות) :<br>$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$ | קבלת $H_0$<br>במבחן $t$<br>למובהקות $\beta_2$                                   | ניתן לבצע בדיקת השערות<br><br>אר"פ $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ חסרי הטיה<br><br>אומדי השונות $(S_{\hat{\alpha}}^2, S_{\hat{\beta}_1}^2, S_{\hat{\beta}_2}^2)$ חסרי הטיה                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | הורדת* המשתנה                 |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |
| השמטת משתנה רלוונטי    | המודל האמיתי :<br>$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$<br><br>המודל הנאמד (הטעות) :<br>$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$ | דחיית $H_0$<br>במבחן $t$<br>למובהקות $\beta_2$                                  | <table><tr><th>בהיעדר : <math>x_2</math></th><th>אומד ל- <math>\beta_1</math></th><th>אומד ל- <math>\alpha</math></th><th>אומד לשונות הפרמטרים</th></tr><tr><td><math>S_{12} = 0</math></td><td>חסר הטיה</td><td>מוטה<br/>אלא אם :<br/><math>\bar{x}_2 = 0</math></td><td>מוטה חיובית</td></tr><tr><td><math>S_{12} \neq 0</math></td><td>מוטה חיובית :<br/><math>S_{12}</math> ו- <math>\beta_2</math> שויי סימן<br/><br/>מוטה שלילית :<br/><math>S_{12}</math> ו- <math>\beta_2</math> מנוגדי סימן</td><td>מוטה</td><td>מוטה חיובית</td></tr></table> <p>לא ניתן לבצע בדיקת השערות</p> | בהיעדר : $x_2$                | אומד ל- $\beta_1$ | אומד ל- $\alpha$ | אומד לשונות הפרמטרים | $S_{12} = 0$ | חסר הטיה | מוטה<br>אלא אם :<br>$\bar{x}_2 = 0$ | מוטה חיובית | $S_{12} \neq 0$ | מוטה חיובית :<br>$S_{12}$ ו- $\beta_2$ שויי סימן<br><br>מוטה שלילית :<br>$S_{12}$ ו- $\beta_2$ מנוגדי סימן | מוטה | מוטה חיובית | הוספת המשתנה |
| בהיעדר : $x_2$         | אומד ל- $\beta_1$                                                                                                                                              | אומד ל- $\alpha$                                                                | אומד לשונות הפרמטרים                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                               |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |
| $S_{12} = 0$           | חסר הטיה                                                                                                                                                       | מוטה<br>אלא אם :<br>$\bar{x}_2 = 0$                                             | מוטה חיובית                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |
| $S_{12} \neq 0$        | מוטה חיובית :<br>$S_{12}$ ו- $\beta_2$ שויי סימן<br><br>מוטה שלילית :<br>$S_{12}$ ו- $\beta_2$ מנוגדי סימן                                                     | מוטה                                                                            | מוטה חיובית                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |
| מולטיקוליניאריות מלאה  | מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל<br>$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$<br>כאשר : $r_{12} = \pm 1$                               | אם :<br>$x_1 = a + bx_2$<br>אז : $r_{12} = 1$                                   | לא ניתן לבצע בדיקת השערות<br><br>אר"פ $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ בלתי מוגדרים.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | הורדת אחד המשתנים             |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |
| מולטיקוליניאריות חלקית | מתאם חזק בין המשתנים המסבירים במודל<br>$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$<br>כאשר : $0.7 <  r_{12}  < 1$                           | א. סתירה בין מבחן F ל- $t$<br><br>ב. רגישות לספציפיקציה<br><br>ג. סימנים הפוכים | ניתן לבצע בדיקת השערות<br><br>אין פגיעה בתכונות אר"פ ושונותם                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | הורדת** אחד המשתנים או איחודם |                   |                  |                      |              |          |                                     |             |                 |                                                                                                            |      |             |              |

- \* במידה והמובהקות גבולית ( $1 < t_{\hat{\beta}} < 2$ ) נשקול להשאיר משתנה לא רלוונטי כי מעלה את  $AdjR^2$  (חוק חיטובסקי).
- \*\* במידה ומובהקותם גבולית ( $1 < t_{\hat{\beta}} < 2$ ) נשקול להשאיר את שניהם בשל העלייה ב-  $AdjR^2$  (חוק חיטובסקי).

## שאלות:

(1) להלן מודל של שכר  $W_t$ , כפונקציה של שנות לימוד  $S_t$ :

$$1. W_t = \alpha + \beta \cdot S_t + u_t$$

להלן מודל של שכר  $W_t$ , כפונקציה של שנות לימוד  $S_t$  ושל גיל  $A_t$ :

$$2. W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + v_t$$

כל האומדים חיוביים ומובהקים וקיים קשר שלילי בין גיל להשכלה.

א.  $\hat{\beta}_1$  במשוואה (1) הוא:

i. אומד חסר הטיה.

ii. אומד מוטה שלילית.

iii. אומד מוטה חיובית.

iv. אומד מוטה, אך לא ניתן לדעת את כיוון ההטיה.

ב. ניתן להשתמש במבחן  $t$  לבדיקת מובהקות

השיפוע במשוואה (1). נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ג. בנוסף למשתנים במשוואה השנייה, החליט החוקר להוסיף גם את

משתנה הוותק,  $EXP_t$ . מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט

החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים

(מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 3:

$$3. W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + \beta_3 \cdot EXP_t + w_t$$

חוזה דעתך על המשוואה השלישית.

(2) נתונות ארבע משוואות הרגרסיה הבאות (כאשר הסטיות במודל האמיתי

מקיימות את הנחות הרגרסיה הקלאסיות):

$$1. X_{2t} = \lambda + \delta \cdot X_{1t} + V_t \quad \text{כאשר התקבל: } \sum \hat{V}_t^2 = \sum (X_{2t} - \bar{X}_{2t})^2$$

$$2. Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t \quad (10.3) \quad (19.8)$$

$$3. Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + W_t \quad (9.9) \quad (17.3) \quad (0.37)$$

$$4. Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \sum_t \quad (6.3)$$

(המספרים בסוגריים הם ערכי  $t$  של אומדני המקדמים).

לגבי הטענות הבאות, קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא, והסבירו:

א. האומד של  $\beta_1$  במשוואה (2) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של  $\beta_1$  מוטה.

ב. האומד של  $\beta_1$  במשוואה (3) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של  $\beta_1$  מוטה.

- ג. האומד של  $\beta_1$  במשוואה (4) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של  $\beta_1$  מוטה.
- ד. האומדן  $\hat{\beta}_1$  במשוואה (4) זהה ל- $\hat{\beta}_1$  במשוואה (2).
- ה. השונות התיאורטית של האומדן  $\hat{\beta}_1$  במשוואה (4) זהה לשונות התיאורטית של  $\hat{\beta}_1$  במשוואה (2), אך אומדני השונות שונים.
- ו. האומד ל- $\alpha$  במשוואה (4) הינו חסר הטיה.
- ז. האומד ל- $\alpha$  במשוואה (3) הינו חסר הטיה.
- ח.  $R^2$  של משוואה (2) גדול מ- $R^2$  של משוואה (3).
- ט.  $\bar{R}^2$  של משוואה (2) גדול מ- $\bar{R}^2$  של משוואה (3).

$$(3) \quad Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t$$

חו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

$$R^2 = 0.92 \quad Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t \quad (0.3) \quad (0.5)$$

- הערכים בסוגריים הם ערכי  $t$ .  
למובהקות הבטות יש טעות במודל
- א. בהנחה כי מתקיים:  $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t$  נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ב. בהנחה כי מתקיים:  $X_{1t} - 2X_{2t} = 1$  לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ג. בהנחה כי מתקיים:  $X_{1t} = X_{2t}^2$  לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ד. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים א' ו-ב'.
- ה. בהנחה כי מתקיים:  $r_{12} = 0.98$
- i. לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.
- ii. איזו בעיה עלולה להיווצר במודל ומהן השלכותיה.
- iii. בהנחה שהמודל יצא מובהק אולם הבטות אינן מובהקות וערכי  $t$  למובהקות הבטות הן כדלקמן:  $t_{\hat{\beta}_1} = 1.31$ ,  $t_{\hat{\beta}_2} = 1.45$ , מה יהיה הפתרון הטוב ביותר, לדעתכם, לבעיה במודל (אליה התייחסתם בסעיף ii)?
1. להוריד את  $x_1$ .
  2. להוריד את  $x_2$ .
  3. להוריד את שני המשתנים.
  4. להותיר את שני המשתנים.

## תשובות סופיות:

- (1) א. ii. ב. לא נכון. ג. קיימת בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.  
 (2) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון.  
 (3) א. לא נכון. ב. נכון. ג. לא נכון. ד. הוכחה. ה. i. לא נכון.  
 ii. מולטיקוליניאריות חלקית. iii. 4.